Γραμμική Άλγεβρα II

Φροντιστηριακές ασκήσεις #1 Φεβρ. 2016, Ισοδυναμία πινάκων

1. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ με

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν βάσεις e, g ώστε ο πίνακας $[T]_e^g$ της T να είναι ίσος με $\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Να βρεθούν πίνακες P και Q ώστε $PAQ = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ όταν $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Υποθέτουμε ότι A, B είναι τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες και ότι το γινόμενο AB είναι αντιστρέψιμο. Δείξτε ότι οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι. $\det(AB) \neq 0$ $\det A \cdot \det B \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$ κ $\det B \neq 0$

4. Δείξτε ότι αν A, B είναι όμοιοι τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες, τότε και οι πίνακες A^k και B^k είναι όμοιοι για κάθε $k \geq 1$.

5. Το ίχνος $tr(A)$ ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, δηλαδή $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

   α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $tr : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ είναι γραμμική.

   β) Να δείξετε ότι ισχύει $tr(AB) = tr(BA)$ για καθε $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

   γ) Να δείξετε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος. Επομένως, αν V είναι ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\phi : V \to V$ γραμμική απεικόνιση, τότε ορίζεται το ίχνος της ϕ ως $tr(\phi) = tr([\phi]_e^e) \in \mathbb{F}$, όπου e είναι οποιαδήποτε διατεταγμένη βάση του V. Δείξτε ότι ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της βάσης e.

6. Έστω $n \geq 1$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ με $T(f(x)) = f(x)'$. Υπολογίστε την βαθμίδα, ορίζουσα και ίχνος της T.

7. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται απο την σχέση $\phi((x, y, z)) = (y + z, x + z, x + y)$. Υπολογίστε την βαθμίδα, ορίζουσα και ίχνος της ϕ.
   3 2 0

[illegible]

8. Υποθέτουμε A τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{F}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $T : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $T(b) = Ab$ για κάθε $b \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Δείξτε ότι η T είναι γραμμική. Υπολογίστε την βαθμίδα, ορίζουσα και ίχνος της T.

9. Θεωρούμε τον υπόχωρο $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b + 3c = 0\}$ του $\mathbb{R}^3$ και την απεικόνιση $\phi : V \to \mathbb{R}^2$ που είναι ο περιορισμός στο V της απεικόνισης $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $\psi((x, y, z)) = (x, 4y + 6z)$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις ϕ, ψ είναι γραμμικές και βρείτε τις βαθμίδες τους.

Φροντιστηριακές ασκήσεις #1.

Άσκηση 1

$T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$

$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix}$

Από χώρο διάστασης 3
σε χώρο διάστασης 4
πίνακας 4x3

Θέλουμε $[T]_e^g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

4x3 →

$\underbrace{\quad}_{r \text{ μονάδες}}$

$\ker T = \left\{ a+bx+cx^2 \mid T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ a+bx+cx^2 \mid \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$

$= \left\{ a+bx+cx^2 \mid \begin{matrix} b+c=0 & a=0 \\ b=0 & c=0 \end{matrix} \right\} = \{0\} = \{0+0x+0x^2\}$

$\dim \ker T = 0$

$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$ άρα $\underline{r=3}$!

$\quad 3 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 3$

$e = \{1, x, x^2\}$ $\qquad g = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

$[T]_e^g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4x3 →

$$T(1)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=1\cdot A_1+0\cdot A_2+0\cdot A_3+0\cdot A_4$$

άρα $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$T(x)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=0\cdot A_1+1\cdot A_2+0\cdot A_3+0\cdot A_4$$

άρα $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$

$$T(x^2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=0\cdot A_1+0\cdot A_2+1\cdot A_3+0\cdot A_4$$

άρα $A_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

A_4?

από A_1, A_2, A_3 ...

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3-r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

← Ο πίνακας δεν είναι μοναδικός.

(προσθέτοντας άλλες γραμμές στην 4η η βαθμίδα δεν αλλάζει!)

άρα $A_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

Ο A_4 δεν μας ενοχλεί γιατί ο A_4 αρκεί να δίνουμε έναν τυχαίο, ώστε A_1, A_2, A_3, A_4 να αποτελούν βάση

Ασκηση 2

$L_A: \mathbb{R}^{4\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}$

$$L_A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$$

$[L_A]_\gamma^\delta = [I]_\beta^\delta [A]_\alpha^\beta [I]_\gamma^\alpha$ Θέλουμε $A = [L_A]_\alpha^\beta$

α η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{4\times1}$ $\alpha = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

β η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{3\times1}$ $\beta = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$L_A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\3 & 1 & -1 & 2\\7 & 1 & -2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$L_A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y+w\\3x+y-z+2w\\7x+y-2z+8w\end{pmatrix}$$

$$(L_A)_\gamma^\delta = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}$$
$3\times4 \to$

$$\operatorname{Ker}L_A = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \middle| L_A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}^{3\times4} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}x-y+w\\3x+y-z+2w\\7x+y-2z+8w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\3 & 1 & -1 & 2 & 0\\7 & 1 & -2 & 8 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 4 & -1 & -1 & 0\\0 & 8 & -2 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 4 & -1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right)$$

$x - y + w = 0$ $x - \frac{t}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{t}{4}$

$4y - z - w = 0 \Rightarrow z = 4\frac{t}{4} \Rightarrow 4y = t \Rightarrow y = \frac{t}{4}$

$3w = 0 \Rightarrow w = 0$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t/4 \\ t/4 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\alpha \neq 0$, συνεχίζει να αποτελεί βάση

Γ.Α. παράγει χώρο άρα είναι βάση KerT.

$$\dim \mathbb{R}^{4\times 1} = \dim \operatorname{Ker}T + \dim \operatorname{Im}T$$

$$4 = 1 + r \Rightarrow r = 3$$

άρα $(L_A)_\gamma^\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

δ?

$$\operatorname{Ker}T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\delta = \left\{ L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Q = [I]_{\gamma \to a}^{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} \right\}$$

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$P = [I]_{\mathcal{B}}^{S} = ($$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1 = -\kappa + 0\lambda + \mu \\ 0 = \kappa - \lambda + 2\mu \\ 0 = \kappa - 2\lambda + 8\mu \end{array}$$

Το σύστημα είναι Cramer αν $\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 8\end{pmatrix} \neq 0$

$$\det(\dots) = 8 - 2 + 1 - 4 = 3 \neq 0$$

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 8\end{vmatrix}}{3} = \frac{-4}{3}, \quad \lambda = \frac{\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 8\end{vmatrix}}{3} = \frac{-6}{3}, \quad \mu = \frac{\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}}{3} = \frac{-1}{3}$$

άρα $P = [I]_{\mathcal{B}}^{S} = \begin{pmatrix}-4/3 & -2/3 & \dots\\ -2 & -3 & \dots\\ -1/3 & -2/3 & \dots\end{pmatrix}$

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2}{3} \qquad \hat{\lambda} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \cancel{8} \end{vmatrix}}{3} = \frac{-3}{3}, \quad \mu = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2}{3}$$

Άσκηση 4

A, B όμοιοι $\overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow} \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας P

A^κ, B^κ $\quad A = P^{-1}\cdot B\cdot P$

$A^\kappa = Q^{-1}\, B^\kappa\, Q$

$$A^\kappa = \underbrace{A\cdot A \cdots A}_{\kappa \text{ φορές}} = \underbrace{(P^{-1}\cdot B\cdot P)(P^{-1}\cdot B\cdot P)\cdots(P^{-1}\cdot B\cdot P)(P^{-1}B\cdot P)}_{\kappa \text{ φορές}}$$

$$= P^{-1}\cdot B\cdot P\cdot P^{-1}\cdot B\cdot P \cdots P^{-1}\cdot B\cdot P\cdot P^{-1}\cdot B\cdot P$$

$$= P^{-1}\cdot \underbrace{B\cdot B \cdots B}_{\kappa \text{ φορές}}\cdot P = P^{-1}\cdot B^\kappa\cdot P$$

άρα $A^\kappa = P^{-1}\cdot B^\kappa\cdot P^{+1} \Longleftrightarrow A^\kappa$ και B^κ όμοια

Άσκηση 5

$$tr\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \quad + a_{nn}$$

$tr(A)$, $A \in K^{n\times n}$ ίχνος trace

i) Ίχνος είναι γραμμική απεικόνιση $tr: K^{n\times n} \to K$

Θ.δ.ο. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

$$tr(A+B) = tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ & a_{22} & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ & b_{22} & \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

$$tr\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{1n}+b_{1n} \\ & a_{22}+b_{22} & \\ a_{n1}+b_{n1} & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + \dots + (a_{nn}+b_{nn}) =$
$= (a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+\dots+b_{nn}) =$
$= tr(A) + tr(B)$

$$tr(\lambda\cdot A) = tr\begin{pmatrix} \lambda a_{1} & \lambda a_{12} & \lambda a_{1n} \\ & \lambda a_{22} & \\ \lambda a_{n1} & & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda a_{11} + \lambda a_{22} + \dots + \lambda a_{nn} =$$

$\lambda(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})$

Άρα η απεικόνιση tr είναι γραμμική

$tr(A\cdot B) = tr(B\cdot A)$

$$tr(A\cdot B) = tr\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} +$

$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2}$

$+ a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \dots + a_{nn}b_{nn}$

$$tr(BA) = tr\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \dots + b_{1n}a_{n1} +$

$+ b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22} + \dots + b_{2n}a_{n2} +$

$+ b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \dots + b_{nn}a_{nn}$

Άρα $tr(A\cdot B) = tr(B\cdot A)$

γ) $A, B \in K^{n\times n}$ $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$
όμοιοι πίνακες

$tr(B) = tr(P^{-1} A \cdot P) = tr(A)$ ← θέλω ισχύει

$tr(B) = tr(P^{-1} \cdot A \cdot P) = tr(P \cdot (P^{-1} \cdot A)) = tr(P P^{-1} \cdot A) = tr(A)$

Δηλαδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος

$\phi : V \to V$

Ορισμός: Ίχνος της γραμμικής απεικόνισης φ είναι το ίχνος $[\varphi]_e^e$.

$tr\,\phi = tr([\varphi]_e^e)$

$tr([\phi]_\gamma^\gamma) = tr([I]_e^\gamma [\varphi]_e^e [I]_\gamma^e) = tr(P^{-1} \cdot [\varphi]_e^e \cdot P) =$

$tr([\varphi]_e^e)$

Ορισμός: Ορίζουσα γραμμικής απεικόνισης ϕ είναι η ορίζουσα του $[\varphi]_e^e$.

$\det\phi = \det([\varphi]_e^e)$

$\det([\varphi]_\gamma^\gamma) = \det([I]_e^\gamma [\varphi]_e^e [I]_\gamma^e) =$

$\det([I]_e^\gamma) \cdot \det([\varphi]_e^e) \cdot \det([I]_\gamma^e) = \det([\varphi]_e^e)$

3/3/16

Άσκηση 6

$T: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ $\quad T(f(x)) = f'(x)$

βαθμίδα, ορίζουσα, ίχνος της T

$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank}[T]_\alpha^\alpha$, $\det [T]_\alpha^\alpha$, $\operatorname{tr}([T]_\alpha^\alpha)$

$\alpha = \{1, x, x^2, \dots x^n\}$ $\quad n+1$

$$\underset{(n+1)\times(n+1)}{[T]_\alpha^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T(1) = 1' = 0$

$T(x) = (x)' = 1$

$T(x^2) = (x^2)' = 2x$

$T(x^3) = 3x^2$

$T(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

$\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}([T]_\alpha^\alpha) = n$

$\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha) = 0$

$\operatorname{tr}([T]_\alpha^\alpha) = \operatorname{tr}(T) = 0 + \dots + 0 = 0$

Ασκηση 4

$V = \{(a,b,c) \in R^3 \mid a+2b+5c=0\} \subseteq R^3$

$R^3 \xrightarrow{\psi} R^2$

$\psi(x,y,z) = (x, 4y+6z)$

$\varphi = \psi_V$

i) γραμμική

ii) βαθμίδα φ, ψ

i) $(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) \in R^3$

$\psi((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = \psi(x_1,y_1,z_1)+\psi(x_2,y_2,z_2)$ και

$\lambda \in R \quad \psi(\lambda(x,y,z)) = \lambda\psi(x,y,z)$

Λύση..

- $\psi((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = (x_1+x_2) 4(y_1+y_2)+6(z_1+z_2) =$
$(x_1, 4y_1+6z_1)+(x_2, 4y_2+6z_2) = \psi(x_1,y_1,z_1)+\psi(x_2,y_2,z_2)$

- $\psi(\lambda(x,y,z) = \psi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, 4\lambda y+6\lambda z) =$
$\lambda(x, 4y, 6z) = \lambda \cdot \psi(x,y,z)$

$V \xrightarrow{\varphi} R^2$

$\varphi(\vec{u}) = \psi(\vec{u}) \cdot \varphi = \psi_V$

$\vec{u} \in V$

$\varphi((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = \varphi((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) =$
$\psi((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) \overset{\psi \text{ γραμ.}}{=\!=} \psi(x_1,y_1,z_1)+\psi(x_2,y_2,z_2)$
$= \varphi(x_1,y_1,z_1)+\varphi(x_2,y_2,z_2)$ ✓

$\varphi(\lambda(x,y,z)) = \psi(\lambda(x,y,z)) \overset{\psi \text{ γραμμική}}{=\!=} \lambda\psi(x,y,z) = \lambda\varphi(x,y,z)$

$x,y,z \in V$